Chapitre 4

ENSEMBLES, RELATIONS, APPLICATIONS

OBJECTIFS DU CHAPITRE

- Notions de base sur les ensembles.
- Maitriser le vocabulaire sur les applications.
- Utiliser les relations binaires.

Table des matières

I ENSEMBLES

Cette partie reprend intégralement le "chapitre" 1.5 sur les ensembles vu précédemment, excepté la notion d'ensembles disjoints et de partition qui sera revue plus loin.

1 ENSEMBLE, ÉLÉMENT

La notion d'ensemble est une notion première dans le formalisme moderne des mathématiques. On ne cherchera donc pas à en donner une définition précise, et on s'en tiendra à une notion « intuitive ».

DÉFINITION 1

Un **ensemble** est une collection d'objets (réels, entiers, fonctions, ...), appelés **élements**.
$x \in E$ se lit « x appartient à E » : cela signifie que x est un élément de l'ensemble E.
$x \notin E$ se lit « x n'appartient pas à E » : cela signifie que x n'est pas un élément de l'ensemble E.

EXEMPLES 1. On connait les ensembles usuels $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$. On peut en construire d'autres de plusieurs façons :

- en explicitant tous ses éléments (en extension) : $A = \{0, 1\}$; $B = \{1, 2, \ldots, 500\}$, noté aussi $[\![1, 500]\!]$.
- en précisant une propriété caractéristique de ses éléments (en compréhension) :
  Pour deux réels a et b, $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ est l'ensemble des réels x tels que $a \leq x \leq b$, et est noté $[a, b]$.
- comme l'ensemble des valeurs prises par une expression dépendant d'un paramètre :
  $C = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est l'ensemble des valeurs prises par $2n$ lorsque n parcourt $\mathbb{N}$, c'est-à-dire l'ensemble des entiers naturels pairs. On le note parfois $2\mathbb{N}$.

EXEMPLES 2. Voici d'autres exemples ou notations classiques :

- $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ et son pendant négatif $\mathbb{R}_-$.
- $\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$ et de même pour $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{Q}^*$.
- $\mathbb{Q} = \left\{ \dfrac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^* \right\}$ et l'ensemble des nombres dits décimaux $\mathbb{D} = \left\{ \dfrac{a}{10^n} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$.
- Il existe un (unique) ensemble ne contenant aucun élément : c'est **l'ensemble vide**, noté $\varnothing$.

Il est important de bien mettre des $\{$*accolades*$\}$. Par ailleurs, contrairement aux listes Python, un ensemble ne tient pas compte des répétitions ni de l'ordre de ses éléments : ainsi $\{1, 2, 1\} = \{1, 2\} = \{2, 1\}$.

DÉFINITION 2

Soient E et F deux ensembles.

- E est dit un **singleton** s'il ne contient qu'un seul élément.
- Un ensemble est dit **fini** s'il possède un nombre fini d'éléments. Sinon, il est dit **infini**.
- E et F sont dits égaux, et on note $E = F$, si E et F ont les mêmes éléments.
- E est **inclus** dans F, et on note $E \subset F$, si $\forall x \in E \quad x \in F$. On dit également que E est un **sous-ensemble** ou une **partie** de F.

EXEMPLE 3. Pour tout ensemble E, on a $E \subset E$ et $\varnothing \subset E$ (ceci sera justifié en partie 3).
Pour tout $x \in E$, le singleton $\{x\}$ est aussi une partie de E.

REMARQUE. **Attention !** On prendra garde à ne pas confondre l'élément x de E et la partie $\{x\}$ de E. Le premier appartient à E : $x \in E$, le second est inclus dans E : $\{x\} \subset E$.

PROPOSITION 3

Soient A, B et C trois ensembles.

$$A = B \iff A \subset B \text{ et } B \subset A$$

$$\big(A \subset B \text{ et } B \subset C\big) \implies A \subset C$$

DÉFINITION 4

On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Autrement dit $A \in \mathcal{P}(E) \iff A \subset E$.

EXEMPLE 4. Si $E = \{1, 2\}$ on a $\mathcal{P}(E) = \big\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\big\}$. Attention $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\} \neq \varnothing$!

DÉFINITION 5

- Étant donnés x et y deux objets mathématiques quelconques (par exemple x est un réel et y une suite...), on définit un nouvel objet mathématique, le **couple** (x, y).
  Deux couples (x, y) et (x', y') sont égaux si $x = x'$ et $y = y'$.
- On définit de même les **triplets** (x, y, z), **quadruplets** (x, y, z, t), et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, des **n-uplets** $(x_1, x_2, ..., x_n)$. Deux n-uplets $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ sont égaux si $\forall i \in [\![1, n]\!] \quad x_i = y_i$.
- A et B étant deux ensembles, on note $A \times B$ l'ensemble des couples (a, b), où $a \in A$ et $b \in B$. Cet ensemble est appelé **produit cartésien de** A **et** B.
- Plus généralement, étant donnés $n \in \mathbb{N}^*$ et A_1, A_2, ..., A_n des ensembles, le produit cartésien $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ est l'ensemble des n-uplets $(a_1, ..., a_n)$, où, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $a_i \in A_i$.

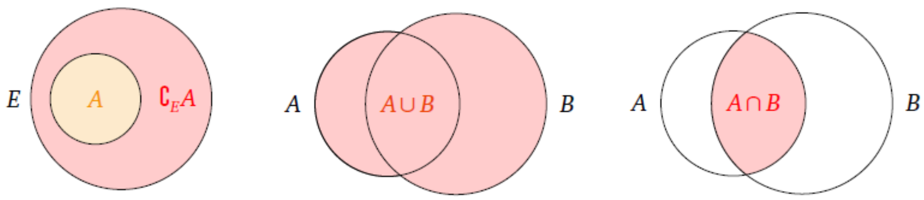
REMARQUE. Attention, les n-uplets tiennent compte de l'ordre : $(1,2) \neq (2,1)$.
On note généralement $A^2 := A \times A$, d'où les $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ déjà rencontrés.
Ne pas confondre $\{(1,2)\}$, qui est un singleton, et l'ensemble $\{1,2\}$ qui contient deux éléments.

2 OPÉRATIONS SUR LES ENSEMBLES

DÉFINITION 6

Soient A, B, E trois ensembles avec $A, B \subset E$.

- **Intersection $\cap$:** $A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$.
- **(Ré)union $\cup$:** $A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$. Pour rappel le « ou » est inclusif (cf dessin).
- **Différence :** $A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$.
- **Complémentaire :** $E \setminus A = \complement_E A = \{x \in E \mid x \notin A\}$. Si aucune ambiguité, on note parfois $\complement A$, A^c ou $\overline{A}$.



EXEMPLES 5.

- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est l'ensemble des irrationnels.
- $\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_- = x \in \mathbb{R} \mid x > 0$ et idem pour $\mathbb{R}_-^*$.

PROPOSITION 7

Soient A, B, C des parties d'un ensemble E.

- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (on peut donc écrire $A \cap B \cap C$ sans ambigüité)
- $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cap A = A$, $A \subset B \iff A \cap B = A$

- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (on peut donc écrire $A \cup B \cup C$ sans ambigüité)
- $A \cup \varnothing = A$, $A \cup A = A$, $A \subset B \iff A \cup B = B$

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

- $\overline{\left(\overline{A}\right)} = A$ et $A \subset B \iff \overline{B} \subset \overline{A}$
- $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$

- $\overline{\varnothing} = E$ et $\overline{E} = \varnothing$
- $A \setminus B = A \cap \overline{B}$
- $A \setminus \varnothing = A$, $A \setminus E = \varnothing$

Démonstration. Soit $x \in E$. On reformule les énoncés grâce à la correspondance logique-ensemble ci-dessous :

Ensemble	$(x \in E)$	Logique
$x \in A \cup B$	équivaut à	$x \in A$ ou $x \in B$
$x \in A \cap B$		$x \in A$ et $x \in B$
$x \in \overline{A}$		non$(x \in A)$
$A \subset B$		$x \in A \implies x \in B$
$A = B$		$x \in A \iff x \in B$

□

3 UN PEU DE LOGIQUE

Soit $P(x)$ une proposition dépendant d'un élément x d'un ensemble quelconque. Par convention :

- « $\forall x \in \varnothing \quad P(x)$ » est toujours *vrai*.
- « $\exists x \in \varnothing \quad P(x)$ » est toujours *faux*.

C'est cette convention qui fait que $\varnothing \subset E$ pour tout ensemble E. Elle entraine aussi le fait que « Faux $\implies$ ... » est vrai : pour deux propositions P et Q dépendant d'une variable x dans E :

$$\left(\forall x \in E \quad P(x) \implies Q(x)\right) \quad \iff \quad \left\{x \in E \mid P(x)\right\} \subset \left\{x \in E \mid Q(x)\right\}$$

Ainsi, si $P(x)$ est fausse pour tout x de E, l'inclusion de droite se réécrit « $\varnothing \subset$ ... », ce qui est toujours vrai.

II Applications

1 Définitions

Définition 8

Soient E, F deux ensembles. Une application de E dans F est la donnée d'une partie $\Gamma \subset E \times F$ vérifiant

$$\forall x \in E \quad \exists! y \in F \quad (x, y) \in \Gamma$$

Si on désigne l'application par f, alors on note $y = f(x)$ l'unique élément de F tel que $(x, y) \in \Gamma$.

- E est appelé ensemble de départ de l'application f.
- F est appelé ensemble d'arrivée de l'application f.
- $\Gamma = \{(x, f(x)) \in E \times F \mid x \in E\}$ est appelé graphe de l'application f.
- $y = f(x)$ est l'image de x par l'application f.
- x est **un** antécédent de $y = f(x)$ par l'application f (un même y peut avoir plusieurs antécédents).

Notation

- On écrit $f : E \to F$ pour indiquer que f est une application dont l'ensemble de départ est E et l'ensemble d'arrivée est F (sans préciser ce que vaut $f(x)$ pour $x \in E$).
- On écrit $f : x \mapsto y$ pour indiquer que l'application f transforme x en y (E et F doivent avoir été précisés avant, par exemple avec $f : E \to F$, ou bien ils sont évidents et sous-entendus).
- On peut combiner les écritures :

$$\begin{aligned} f : E &\to F \\ x &\mapsto y \end{aligned} \qquad\qquad f : x \in E \mapsto y$$

On note $\mathscr{F}(E, F)$ ou F^E l'ensemble des applications de E dans F.
Deux applications $f, g \in F^E$ sont égales, et on note $f = g$, si pour tout $x \in E$, $f(x) = g(x)$.

L'écriture $f(x)$ n'a un sens que si on sait dans quel ensemble se trouve x. Il faut donc avoir précisé l'ensemble de départ E avant d'écrire $f(x)$. Quand on écrit $f(x)$, on comprend que le x est un élément quelconque de E.
Exemples 6.

1) L'application $x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$ est la fonction carré (quand on part de $\mathbb{R}$, on écrit parfois juste $x \mapsto x^2$).
2) Soit E un ensemble. On appelle application identité de E, et on note id_E, l'application

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_E : E &\to E \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

3) Soient E un ensemble et $A \subset E$. La fonction indicatrice de A, notée $\mathbb{1}_A$ est définie par :

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_A : E &\to \{0, 1\} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{aligned}$$

4) $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ signifie que l'application u associe à chaque entier naturel n un réel $u(n)$. En général on note $u_n := u(n)$ et on dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite (réelle).
5) Plus généralement, pour deux ensembles E et I, si $a \in E^I$, on dit que les $a_i := a(i)$ forment une famille d'éléments de E indexée par I, ce qu'on note $(a_i)_{i \in I}$.

REMARQUE. Pour qu'une application $f : E \to F$ soit bien définie, il faut que, pour ***chaque*** élément $x \in E$:

- $f(x)$ ait un sens.
- $f(x)$ appartienne à F.
- $f(x)$ soit défini de manière unique.

Ainsi, on peut écrire $f_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$ aussi bien que $f_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$ ou encore $f_3 : \begin{array}{rcl} [1, +\infty[& \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$

Mais ces fonctions sont MAL définies : $f_4 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$ ou bien $f_5 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$ et même $f_6 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$

Pour f_6, le problème vient du fait que, par exemple, $\sqrt{-1}$ n'est pas défini de manière unique : ce peut être i ou $-i$.

DÉFINITION 9 (*Restriction et prolongement*)

Soient E, F deux ensembles, $f : E \to F$ une application et $A \subset E$ une partie de E.

- On appelle restriction de f à A, notée $f|_A$, la fonction $f|_A : \begin{array}{rcl} A & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$.
- On dit qu'une application g est un prolongement de f si f est une restriction de g.

EXEMPLES 7.

1) L'application f_3 dans la remarque ci-dessus est la restriction à $[1, +\infty[$ de l'application f_2 (mais pas de f_1 car l'ensemble d'arrivée diffère).
2) L'application h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $h(0) = 0$ est un prolongement de la fonction inverse (qui, elle, est définie sur $\mathbb{R}^*$).

2 COMPOSITION D'APPLICATIONS

DÉFINITION 10 (*Composition*)

Soient E, F, G trois ensembles, $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.
On appelle composée de g et f, notée $g \circ f$ l'application

$$g \circ f : \begin{array}{rcl} E & \to & G \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$$

REMARQUES.

L'application $f : E \to F$ étant donnée, pour que $g \circ f$ ait un sens, il suffit que g soit définie sur $\{f(x) \in F \mid x \in E\}$, et non sur F tout entier. On appellera plus tard cet ensemble $f(E)$, cf définition 20.

En général : $g \circ f \neq f \circ g$: si $\begin{cases} f : x \mapsto x+1 \\ g : x \mapsto x^2 \end{cases}$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} (g \circ f)(x) = (x+1)^2 \\ (f \circ g)(x) = x^2 + 1 \end{cases}$

PROPOSITION 11 (*Associativité de la composition*)

Soient E, F, G, H quatre ensembles, $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$ trois applications.
Alors $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

Démonstration. Cela découle de la défintion de $\circ$. $\square$

REMARQUE. Comme pour $+$, $\times$, $\cup$, $\cap$, "et", "ou", cette propriété permet d'écrire $h \circ g \circ f$ sans ambiguïté.

EXEMPLE 8. Soit $f \in F^E$. Alors $f \circ \mathrm{id}_E = f$ et $\mathrm{id}_F \circ f = f$.

3 Applications injectives, surjectives, bijectives

Définition 12 (***jection*)

Soient E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.

- On dit que f est une injection (ou qu'elle est injective) lorsque tout élément y de F admet **au plus** un antécédent, ce qui s'écrit :

$$\forall x, x' \in E \quad f(x) = f(x') \implies x = x'$$

- On dit que f est une surjection (ou qu'elle est surjective) lorsque tout élément y de F admet **au moins** un antécédent, ce qui s'écrit :

$$\forall y \in F \quad \exists x \in E \quad y = f(x)$$

- On dit que f est une bijection (ou qu'elle est bijective) lorsqu'elle est à la fois injective et surjective, c'est-à-dire que tout élément de F admet **exactement** un antécédent, ce qui s'écrit :

$$\forall y \in F \quad \exists! x \in E \quad y = f(x)$$

Proposition 13 (*Reformulation en termes d'ensemble des solutions d'une équation*)

Soient E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.

- f est injective si et seulement si, pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$, d'inconnue $x \in E$, admet **au plus** une solution.
- f est surjective si et seulement si, pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$, d'inconnue $x \in E$, admet **au moins** une solution.
- f est bijective si et seulement si, pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$, d'inconnue $x \in E$, admet **exactement** une solution.

Exemples 9.

1) Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$. On a $\begin{cases} f(1) = f(-1) \text{ et } -1 \neq 1 \text{ donc } f \text{ n'est pas injective} \\ f(x) = -1 \text{ n'a pas de solution dans } \mathbb{R} \text{ donc } f \text{ n'est pas surjective} \end{cases}$
2) L'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 \end{array}$ est une bijection.
3) Pour tout ensemble E, l'identité id_E est bijective.

Remarque. Injectivité, surjectivité et bijectivité d'une fonction dépendent des ensembles de départ et d'arrivée :

$$f : \begin{array}{c} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array} \quad \text{n'est ni injective, ni surjective}$$

$$g : \begin{array}{c} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array} \quad \text{est injective, pas surjective}$$

$$h : \begin{array}{c} \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto x^2 \end{array} \quad \text{n'est pas injective, est surjective}$$

$$i : \begin{array}{c} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto x^2 \end{array} \quad \text{est injective et surjective}$$

En termes de rédaction il est important de lever les éventuels doutes en précisant « f est une injection / surjection / bijection de A sur B ».

Proposition 14 (***jection et composition*)

Soient E, F, G trois ensembles, $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

- Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
- Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
- Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective.

Démonstration. Supposons que f et g soient injectives. Soient $x, x' \in E$ tels que $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$. Alors

$$\begin{aligned} g(f(x)) = g(f(x')) &\implies f(x) = f(x') && \text{par injectivité de } g \\ &\implies x = x' && \text{par injectivité de } f \end{aligned}$$

Ainsi, $g \circ f$ est injective.

Supposons que f et g soient surjectives. Soit $y \in G$. Par surjectivité de g, il existe $z \in F$ tel que $g(z) = y$. Par surjectivité de f, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = z$. Ainsi,

$$(g \circ f)(x) = g(z) = y$$

On a prouvé que tout $y \in G$ admet un antécédent $x \in E$ par $g \circ f$. Ainsi, $g \circ f$ est surjective.

Supposons que f et g soient bijectives (donc injectives et surjectives). Alors par ce qui précède $g \circ f$ est injective et surjective. Elle est donc bijective. □

Proposition 15 (*Réciproque partielle du résultat précédent*)

Soient E, F et G trois ensembles, et $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

- Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
- Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective .

Démonstration. Supposons $g \circ f$ injective. Soient $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$. Alors en appliquant g on trouve $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$. Comme $g \circ f$ est injective, on en déduit que $x = x'$. Ainsi f est injective.
La démonstration du deuxième résultat est facile. □

4 Application réciproque

Proposition 16 (*Application réciproque*)

Soit $f \in \mathscr{F}(E, F)$.
f est une bijection de E sur F si et seulement si il existe une application $g : F \to E$ telle que

$$g \circ f = \mathrm{id}_E \quad \text{et} \quad f \circ g = \mathrm{id}_F$$

Cette application g est unique : elle est appelée application réciproque de f et est notée f^{-1}.

Démonstration. Montrons l'implication directe. Supposons que f soit une bijection. On définit $g : F \to E$ de la façon suivante : pour tout $y \in F$, $g(y) = x$, où $x \in E$ est l'unique solution de $f(x) = y$. Cela définit bien une application car tout $y \in F$ admet bien une unique image $g(y)$.
Soit $x \in E$ et notons $y = f(x)$. Alors

$$(g \circ f)(x) = g(y) = x$$

donc par arbitraire sur $x \in E$, on en déduit $g \circ f = \mathrm{id}_E$. On déduit de même que $f \circ g = \mathrm{id}_F$.

Montrons l'implication réciproque. Comme $g \circ f = \mathrm{id}_E$, $g \circ f$ est une bijection. Par la proposition 15, f est une injection. De plus $f \circ g = \mathrm{id}_F$, donc $f \circ g$ est une bijection. À nouveau par la proposition 15, on en déduit que f est une surjection. Ainsi f est bijective.

Enfin, montrons que g est unique. Supposons que $g_1, g_2 \in \mathscr{F}(F, E)$ vérifient

$$g_1 \circ f = g_2 \circ f = \mathrm{id}_E \quad \text{et} \quad f \circ g_1 = f \circ g_2 = \mathrm{id}_F$$

Alors

$$g_1 = g_1 \circ \mathrm{id}_F = g_1 \circ (f \circ g_2) = (g_1 \circ f) \circ g_2 = \mathrm{id}_E \circ g_2 = g_2$$

Finalement, $g_1 = g_2$: on a bien unicité de la fonction g.

□

PROPOSITION 17

Soit $f : E \to F$ une bijection. Alors pour tout $(x, y) \in E \times F$,

$$f(x) = y \iff x = f^{-1}(y)$$

Démonstration. En appliquant f^{-1} (implication directe) ou f (implication réciproque). □

REMARQUE. Dans le cas où $f : E \to E$ vérifie $f \circ f = \mathrm{id}_E$, càd que $f^{-1} = f$, on dit que f est une <u>involution sur E</u>.

EXEMPLES 10.

- $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ et $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ sont deux bijections réciproques l'une de l'autre.
- L'application id_E est une involution sur E.
- Les applications $z \mapsto -z$ et $z \mapsto \overline{z}$ sont des involutions sur $\mathbb{C}$.
- Les transformations du plan complexe (chapitre 3) sont des bijections.
- Montrer que $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ est une bijection et déterminer sa réciproque.

PROPOSITION 18

Soient E, F, G trois ensembles, $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications bijectives. Alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Démonstration. On vérifie directement, par associativité,

$$\begin{aligned}(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) &= f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f \\ &= f^{-1} \circ \mathrm{id}_F \circ f \\ &= f^{-1} \circ f \\ &= \mathrm{id}_E\end{aligned}$$

et de même $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = \mathrm{id}_G$. Donc par la proposition 16, $f \circ g$ est bijective et sa réciproque est $f^{-1} \circ g^{-1}$. □

PROPOSITION 19

Soit $f : E \to F$ une application bijective. Alors $f^{-1} : F \to E$ est aussi une application bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$.

Démonstration. Comme f est une bijection, on a (Proposition 16)

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F \qquad f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$$

On en déduit (Proposition 16) que f^{-1} est bijective et que $f = (f^{-1})^{-1}$. □

5 Images directe et réciproque

Définition 20 *(Images directe et image réciproque)*

Soient $f : E \to F$ une application, $A \subset E$ et $B \subset F$.

- L'image directe de A par f est l'ensemble des images des éléments de A, notée

$$f(A) := \{f(x) \in F \mid x \in A\} \quad \subset F$$

- L'image réciproque de B par f est l'ensemble des antécédents des éléments de B, noté

$$f^{-1}(B) := \{x \in E \mid f(x) \in B\} \quad \subset E$$

Exemples 11. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 3x+1$.

- Si $A = \{0, 4, 5\}$ l'image directe de A est $f(A) = \{1, 13, 16\}$.
- Si $A = [2, 7[$, l'image de directe de A est $f(A) = [7, 22[$.
- Si $B = [10, 16]$, l'image de réciproque de B est $f^{-1}(B) = [3, 5]$.

Si f désigne la fonction carré, $f([1,2]) = [1,4]$ et $f^{-1}([1,4]) = [-2,-1] \cup [1,2]$.

$\cos^{-1}(\{0\}) = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,;\, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Remarque. **Attention !** L'écriture $f^{-1}(B)$ ci-dessus est une notation, et ne suppose pas l'existence de l'application réciproque f^{-1}.

L'ensemble $f^{-1}(B)$ a un sens même si f n'est pas une bijection. En revanche, si f est une bijection alors l'image réciproque $f^{-1}(B)$ coïncide avec l'image directe de B par f^{-1}.

Proposition 21 *(Caractérisation de $f(A)$, $f^{-1}(B)$)*

Avec les mêmes hypothèses que la définition ci-dessus, pour tous $x \in E$ et $y \in F$,

$$y \in f(A) \iff \exists x' \in A \quad y = f(x')$$

$$x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B$$

Démonstration. C'est une réécriture de la définition. □

Proposition 22 *(Caractérisation de **jection)*

Soit $f \in F^E$ une application. Alors

- f est surjective si et seulement si $f(E) = F$.
- f est injective si et seulement si pour tout $y \in F$, $f^{-1}(\{y\})$ admet **au plus** un élément.
- f est bijective si et seulement si pour tout $y \in F$, $f^{-1}(\{y\})$ est un singleton.

PROPOSITION 23 (*Propriétés des images directes et réciproques*)

Soit $f : E \to F$ une application.

1) Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$:
   a) $A \subset B \implies f(A) \subset f(B)$
   b) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
   c) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ (attention c'est bien $\subset$!)
2) Soient $A, B \in \mathcal{P}(F)$:
   a) $A \subset B \implies f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$
   b) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
   c) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$
   d) $f^{-1}(F \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A)$

Démonstration. Prouvons 1) b). Soient $A, B \subset E$ et $y \in F$.

$$\begin{aligned} y \in f(A \cup B) &\iff \exists x \in A \cup B \quad y = f(x) \\ &\iff \exists x \in A \quad y = f(x) \quad \text{ou} \quad \exists x' \in B \quad y = f(x') \\ &\iff y \in f(A) \quad \text{ou} \quad y \in f(B) \\ &\iff y \in f(A) \cup f(B) \end{aligned}$$

Donc par arbitraire sur y, on a $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

Maintenant, montrons 1) c). Soient $A, B \subset E$ et $y \in F$.

$$\begin{aligned} y \in f(A \cap B) &\implies \exists x \in A \cap B \quad y = f(x) \\ &\implies \exists x \in A \quad y = f(x) \quad \text{et} \quad \exists x' \in B \quad y = f(x') \qquad (*) \\ &\implies y \in f(A) \quad \text{et} \quad y \in f(B) \\ &\implies y \in f(A) \cap f(B) \end{aligned}$$

D'où par arbitraire sur y, on a $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Note : la ligne $(*)$ n'est pas équivalente à la ligne qui lui précède. En effet si on suppose $(*)$ on a a priori $x \neq x'$ *et donc on ne peut pas en déduire que y est l'image d'un élément de $A \cap B$. C'est pour ça qu'on n'a qu'une inclusion et qu'en général $f(A) \cap f(B) \not\subset f(A \cap B)$. Contre-exemple :*

$$A = \{0\} \quad B = \{1\} \quad f : x \in \{0, 1\} \mapsto 0$$

alors $f(A) = f(B) = \{0\}$ et $f(A \cap B) = f(\varnothing) = \varnothing$.

Prouvons 2) b). Soient $A, B \subset F$ et $x \in E$.

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(A \cup B) &\iff f(x) \in A \cup B \\ &\iff f(x) \in A \quad \text{ou} \quad f(x) \in B \\ &\iff x \in f^{-1}(A) \quad \text{ou} \quad x \in f^{-1}(B) \\ &\iff x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \end{aligned}$$

D'où par arbitraire sur x, $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

Prouvons 2) c). Soient $A, B \subset F$ et $x \in E$.

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(A \cap B) &\iff f(x) \in A \cap B \\ &\iff f(x) \in A \quad \text{et} \quad f(x) \in B \\ &\iff x \in f^{-1}(A) \quad \text{et} \quad x \in f^{-1}(B) \\ &\iff x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \end{aligned}$$

D'où par arbitraire sur x, $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

□

6 Application aux sommes

Définition 24 (*Union et intersection*)

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E indexée par un ensemble I non vide (possiblement infini).

1) On définit l'intersection des A_i par $\bigcap_{i\in I} A_i := \{x\in E \mid \forall i\in I \quad x\in A_i\}$.
2) On définit la réunion des A_i par $\bigcup_{i\in I} A_i := \{x\in E \mid \exists i\in I \quad x\in A_i\}$.
3) On dit que les A_i sont 2 à 2 disjoints si $\forall (i,j)\in I^2 \quad i\neq j \implies A_i\cap A_j=\varnothing$.
4) On dit que les A_i sont disjoints dans leur ensemble si $\bigcap_{i\in I} A_i=\varnothing$.

Exemple 12. $A=\{2,3\}, B=\{1,3\}, C=\{1,2\}$ sont disjoints dans leur ensemble, mais pas 2 à 2.

Définition 25 (*Partition*)

Avec les mêmes hypothèses que ci-dessus, on dit que la famille $(A_i)_{i\in I}$ est une partition de E si :

- $\forall i\in I \quad A_i\neq\varnothing$.
- $\bigcup_{i\in I} A_i = E$.
- Les A_i sont 2 à 2 disjoints.

Exemple 13. Soient $\mathscr{I}$ l'ensemble des entiers impairs et $\mathscr{P}$ celui des entiers pairs. $(\mathscr{I},\mathscr{P})$ est une partition de $\mathbb{Z}$.
Rappel : on a vu l'intérêt des partitions pour "découper" des sommes et produits.

Proposition 26 (*Changement d'indice généralisé*)

Soit I et J deux ensembles **finis**. Soit $\varphi: I\to J$ bijective. On a alors, pour toute famille $(b_j)_{j\in J}$:

$$\sum_{j\in J} b_j = \sum_{i\in I} b_{\varphi(i)}.$$

La famille $(b_{\varphi(i)})_{i\in I}$ est une réindexation de la famille $(b_j)_{j\in J}$.

Démonstration. Admis pour le moment. □

Exemple 14. Avec la bijection $\varphi: i\in [\![m,n]\!] \mapsto m+n-i\in [\![m,n]\!]$, on retrouve la formule

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{j=m}^{n} a_{m+n-j}.$$

Remarque. On a une formule analogue avec le produit

III Relation binaires

Définition 27

Soit E un ensemble non vide. On appelle relation binaire sur E toute partie $\mathcal{R}$ de $E\times E$. On note $x\mathcal{R}y$ pour $(x,y)\in\mathcal{R}$.
Si $x\mathcal{R}y$, on dit que x est en relation avec y.

En pratique, pour définir $\mathcal{R}$, on écrit $x\mathcal{R}y \iff P(x,y)$ où $P(x,y)$ est une proposition vraie si $(x,y)\in\mathcal{R}$, fausse sinon. On raisonne uniquement avec P, sans expliciter la partie $\mathcal{R}\subset E\times E$.

Exemples 15. Dans $\mathbb{R}$, on définit $x\mathcal{R}y \iff x\leq y$. Cela correspond à la partie $\mathcal{R}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\leq y\}$.
Dans l'ensemble des droites du plan $D\mathcal{R}D' \iff D /\!/ D'$

1 Relation d'ordre

Définition 28 (*Relation d'ordre*)

Une relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur un ensemble E est une relation d'ordre si

- $\mathcal{R}$ est réflexive, càd $\quad \forall x \in E \quad x\mathcal{R}x$
- $\mathcal{R}$ est antisymétrique, càd $\quad \forall x, y \in E \quad x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x \implies x = y$
- $\mathcal{R}$ est transitive, càd $\quad \forall x, y, z \in E \quad x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \implies x\mathcal{R}z$

On appelle ensemble ordonné un couple $(E, \mathcal{R})$ où $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur E.

Définition 29 (*Ordre total et partiel*)

Soit $(E, \mathcal{R})$ un ensemble ordonné. On dit que $\mathcal{R}$ définit un ordre total sur E si

$$\forall x, y \in E \quad (x\mathcal{R}y \text{ ou } y\mathcal{R}x)$$

L'ordre est dit partiel s'il n'est pas total.

Exemples 16. $\leq$ est une relation d'ordre total sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$... (mais pas $\mathbb{C}$!). Il en va de même pour $\geq$.
$<$ et $>$ ne sont pas des relations d'ordre, car non réflexives.
"divise" est une relation d'ordre partiel sur $\mathbb{N}$.
$\subset$ est en général une relation d'ordre partiel sur $\mathcal{P}(E)$, où E est un ensemble.

Définition 30 (*Vocabulaire lié à l'ordre*)

Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné, et A une partie de E.

- $m \in E$ est un minorant de A si $\forall x \in A \quad m \preceq x$
- $M \in E$ est un majorant de A si $\forall x \in A \quad x \preceq M$
- A est majorée (resp. minorée) si elle possède au moins un majorant (resp. minorant).
- A est bornée si A est majorée et minorée.
- $m \in E$ est **le** plus petit élément de A si m est un minorant de A et $m \in A$.
- $M \in E$ est **le** plus grand élément de A si M est un majorant de A et $M \in A$.

Proposition 31 (*Unicité*)

Le plus petit élément (resp. le plus grand) de A, s'il existe, est unique.

Démonstration. Immédiat par la propriété d'antisymétrie. □

2 Relation d'équivalence

Définition 32 (*Relation d'équivalence*)

Une relation $\mathcal{R}$ est une **relation d'équivalence** si

- $\mathcal{R}$ est réflexive, càd $\quad \forall x \in E \quad x\mathcal{R}x$
- $\mathcal{R}$ est symétrique, càd $\quad \forall x, y \in E \quad x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x$
- $\mathcal{R}$ est transitive, càd $\quad \forall x, y, z \in E \quad x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \implies x\mathcal{R}z$

DÉFINITION 33 (*Classe d'équivalence*)

Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$. Pour tout $x \in E$, on définit la classe d'équivalence de x l'ensemble

$$[x] := \{y \in E \mid x\mathcal{R}y\}$$

On la note parfois aussi $\overline{x}$. Un élément quelconque $y \in \overline{x}$ est dit un représentant de la classe.

EXEMPLES 17.

- Dans tout ensemble E, la relation d'égalité est une relation d'équivalence et $[x] = x$.
- Dans l'ensemble des droites du plan $/\!/$ est une relation d'équivalence.
- Dans $\mathbb{Z}$ la congruence $x\mathcal{R}y \iff x \equiv y\,[5]$ est une relation d'équivalence et $\overline{2} = \{2+5k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

PROPOSITION 34 (*Propriétés des classes d'équivalence*)

Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$. Soient $x, y \in E$.

1) $x \in [x]$ et en particulier, $[x] \neq \varnothing$.
2) Si $x\mathcal{R}y$, alors $[x] = [y]$.
3) Si $[x] \neq [y]$, alors $[x] \cap [y] = \varnothing$. Dit autrement, ou bien $[x] = [y]$, ou bien $[x]$ et $[y]$ sont disjointes.
4) $E = \displaystyle\bigcup_{x \in E} [x]$
5) Les classes d'équivalence forment une partition de E.

Démonstration. Pour 1) : on a $x\mathcal{R}x$ par réflexivité de $\mathcal{R}$, d'où le résultat.

Pour 2) : soit $z \in [y]$. Alors on a $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ et donc par transitivité $x\mathcal{R}z$, si bien que $z \in [x]$. Par arbitraire sur z, on a ainsi $[y] \subset [x]$. De même, on montre que $[x] \subset [y]$.

Pour 3) : supposons par l'absurde que $[x] \neq [y]$ et $[x] \cap [y] \neq \varnothing$. Alors il existe $z \in [x] \cap [y]$. Ainsi $x\mathcal{R}z$ et $z\mathcal{R}y$. Par transitivité, $x\mathcal{R}y$ si bien que par 2), on a $[x] = [y]$. Contradiction. D'où le résultat.

Pour 4) : comme $\{x\} \subset [x]$ par le 1), on obtient une première inclusion

$$E = \bigcup_{x \in E} \{x\} \subset \bigcup_{x \in E} [x]$$

et l'inclusion réciproque est évidente car $[x] \subset E$. D'où le résultat.

Pour 5) : cela découle de la définition d'une partition, couplée à 1)-3)-4). □

EXEMPLES 18. Dans $\mathbb{Z}$ on considère $x\mathcal{R}y \iff x \equiv y\,[4]$.

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et déterminer les classes d'équivalence.